УДК 681.511.22

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОГРАММНОГО ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

ON OPTIMIZATION OF LINEAR DISCRETE-TIME SYSTEM OPEN-LOOP TERMINAL CONTROL

Калёв Виталий Игоревич, аспирант каф. прикладной математики, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19. E-mail: butahlecoq@gmail.com, Тел.: +7(992)018-89-42

Шориков Андрей Фёдорович, д-р. ф.-м. наук, профессор каф. прикладной математики, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19. E-mail: afshorikov@mail.ru. Тел.: +7(922)304-36-63

Vitaly I. Kalev, Post graduate student, Department of Applied Mathematics, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin, 620002, Mira street, 19, Ekaterinburg, Russia. E-mail: butahlecoq@gmail.com. Ph.: +7(992)018-89-42

Andrei F. Shorikov, Doctor Sc., Prof., Department of Applied Mathematics, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin,620002, Mira str., 19, Ekaterinburg, Russia. E-mail: afshorikov@mail.ru. Ph.: +7(922)304-36-63

Аннотация: В работе рассматривается способ построения оптимального программного терминального управления для класса линейных дискретных динамических систем. Предполагается, что вектор состояния и вектор управления стеснены заданными ограничениями. Для решения задачи оптимального программного терминального управления используется аппарат построения прямых и попятных областей достижимости. Демонстрация эффективности предложенного метода иллюстрируется на примере моделирования одной задачи терминального управления ракеты-носителя.

Abstract: In this paper, an approach of optimal open-loop terminal control computation is considered for the class of linear discrete-time systems. It is assumed that the state and control vectors are bounded by specified constraints. The tool of forward and backward reachable sets computation is used for solving the optimal open-loop terminal control problem. The performance of proposed approach is illustrated by simulation of one terminal control problem for launch vehicle.

***Ключевые слова*:** оптимальное управление; терминальное управление; области достижимости; линейные системы; дискретные системы.

***Keywords*:** optimal control; terminal control; reachable sets; linear systems; discrete-time systems.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время достаточно хорошо изучены задачи оптимизации терминального управления динамическими системами, в которых считаются известными вероятностные характеристики априори неопределенных параметров. Однако часто невозможно получить такую информацию о вероятностных характеристиках неопределенных параметров []. Поэтому для решения задач оптимизации управления в подобных системах необходимо учитывать наличие априорной неопределенности параметров состояния.

Данная работа посвящена решению задачи оптимизации программного терминального управления в классе линейных дискретных динамических систем. Предлагаемый подход к решению задачи оптимизации предполагает использование аппарата построения прямых и попятных областей достижимости фазовых состояний системы. Для решения этой подзадачи мы используем общий алгебраический рекуррентный метод построения областей достижимости, изложенный в работах [3, 4].

Данная работа организована следующим образом. В первой главе приводится описание класса рассматриваемых динамических систем и ставится задача оптимального терминального управления такими системами. Во второй главе мы приводим описание используемого метода построения областей достижимости. Третья глава посвящена описанию общей схемы решения поставленной задачи. Эффективность предлагаемого метода демонстрируется на примере численного моделирования задачи терминального управления расходом топлива ракеты-носителя [2] в четвертой главе. В заключительной главе делаются выводы о проделанной работе.

КЛАСС РАССМАТРИВАЕМЫХ СИСТЕМ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0,T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ рассматривается класс линейных управляемых систем, динамика которых описывается дискретным векторно-матричным рекуррентным соотношением вида:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \qquad (1)$$

где $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния (фазовый вектор); $u(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ – вектор управляющего воздействия; $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матрица состояния системы; $B(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ – матрица управления; t – дискретный момент времени, $t \in \overline{0, T-1}$.

Считается, что векторы состояния и допустимого управления удовлетворяют заданным ограничениям:

$$x(t) \in \mathbf{X}(0) \subset \mathbf{R}^n, \qquad (2)$$

$$u(t) \in \mathbf{U}(t) \subset \mathbf{R}^p,\ t \in \overline{0,T-1}. \qquad (3)$$

Будем рассматривать задачу оптимального терминального управления системой (1) с ограничениями (2) и (3), для которой необходимо минимизировать функционал $\Phi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{r\times(T-1)} \to \mathbf{R}$, характеризующий отклонение элементов вектора состояния $x(t)$ системы (1) в конечный момент времени T от их требуемых значений x^d:

$$\Phi = \left\| c,\ \left(x(T) - x^d\right)\right\|_2, \qquad (4)$$

где $x(T) = x\left(x(0), \{u(t)\}_{t\in\overline{1,T-1}}\right) \in \mathbf{R}^n$ – финальное фазовое состояние объекта управления (1); x^d – желаемое финальное состояние объекта (1); $c \in \mathbf{R}^n$ – вектор масштабных коэффициентов; $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма.

Опираясь на вышесказанное, задачу оптимального терминального управления можно формализовать следующим образом. Для линейной дискретной динамической системы (1) – (3) необходимо найти такую последовательность управлений

$$u^{(e)}(\cdot) = \left\{u^{(e)}(t)\right\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{R}^{r\times T-1},$$

$$\forall t \in \overline{0, T-1} : u^{(e)}(t) \in \mathbf{U}(t),$$

которая переведет систему (1) к терминальному моменту времени T из начального множества состояний $\mathbf{X}(0)$ в такое конечное множество, для которого функционал (4) будет принимать наименьшее возможное значение.

Чтобы решить вышеуказанную задачу, необходимо знание области достижимости динамической системы. Следующие разделы посвящены формированию алгоритма построения областей достижимости.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ

В данной работе для построения областей достижимости линейной дискретной управляемой динамической системы вида (1) – (3) будем использовать общий алгебраический рекуррентный метод [3, 4]. В работе [3] было показано, что точная область достижимости $\mathbf{G}^{(+)}\left(0, x(0), t\right) \subset \mathbb{R}^n$, т.е. множество всех допустимых фазовых состояний $x(t)$, линейной дискретной управляемой динамической системы (1) – (3), для всех $t \in \overline{1,T}$ представляет собой выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник с конечным числом вершин в пространстве $\mathbb{R}^n$. Также для такой области достижимости справедливо эволюционное (полугрупповое) свойство:

$$\mathbf{G}^{(+)}\left(0, x(0), t+1\right) = \mathbf{G}^{(+)}\left(t, \mathbf{X}(t), t+1\right), \forall t \in \overline{1, T-1},$$

где $\mathbf{X}(t) = \mathbf{G}^{(+)}\left(0, x(0), t\right)$ – область достижимости на момент времени t, соответствующая паре $\left(0, x(0)\right)$ и являющаяся выпуклым, замкнутым и ограниченным многогранником с конечным числом вершин в $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, задача отыскания множества $\mathbf{G}^{(+)}\left(0, x(0), T\right)$ сводится к реализации построения рекуррентной последовательности одношаговых областей достижимости:

$$\mathbf{X}(t+1) = \mathbf{G}^{(+)}\left(t, \mathbf{X}(t), t+1\right),\ t \in \overline{0, T-1}.$$

Множество допустимых фазовых состояний $x(t+1)$ рассматриваемой системы (1), содержащее все вершины области достижимости $\mathbf{G}^{(+)}\left(t, \mathbf{X}(t), t+1\right)$ на момент времени $(t+1)$, $t \in \overline{0, T-1}$ соответствующей паре $\left(t, \mathbf{X}(t)\right) \in \overline{0, T-1} \times 2^{\mathbb{R}^n}$, где $\mathbf{X}(t) = \mathbf{G}^{(+)}\left(0, x(0), t\right)$ – выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник с конечным числом вершин в $\mathbb{R}^n$, определим согласно нижеследующим построениям.

Шаг 1. Формируем множество $\mathbf{\Gamma}_n\left(\mathbf{X}(t)\right)$ всех вершин многогранника $\mathbf{X}(t)$.

Шаг 2. Формируем множество $\mathbf{\Gamma}_u\left(\mathbf{U}(t)\right)$ всех вершин многогранника $\mathbf{U}(t)$.

Шаг 3. Определяем множества:

$$\hat{\mathbf{X}}(t+1) = \left\{\hat{x}(t+1) \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x}(t+1) = A(t)x(t),\right.$$

$$\left. x(t) \in \mathbf{\Gamma}_n\left(\mathbf{X}(t)\right)\right\},$$

$$\hat{\mathbf{Y}}(t+1) = \left\{\hat{y}(t+1) \in \mathbb{R}^n \mid \hat{y}(t+1) = B(t)u(t),\right.$$

$$\left. u(t) \in \mathbf{\Gamma}_u\left(\mathbf{U}(t)\right)\right\},$$

$$\hat{\mathbf{G}}^{(+)}(t+1)=\{\hat{v}(t+1)\in\mathbb{R}^n \mid \hat{v}(t+1)=\hat{x}(t+1)+\hat{y}(t+1),\ \hat{x}(t+1)\in\hat{\mathbf{X}}(t+1),\ \hat{y}(t+1)\in\hat{\mathbf{Y}}(t+1)\},$$

здесь $\hat{\mathbf{G}}^{(+)}(t+1)$ – сумма Минковского множеств $\hat{\mathbf{X}}(t+1)$ и $\hat{\mathbf{Y}}(t+1)$, являющаяся множеством точек области достижимости, содержащим также избыточные точки.

Шаг 4. Для сформированного множества точек

$$\hat{\mathbf{G}}^{(+)}(t+1)=\{\hat{v}^{(i)}(t+1)\}_{i\in\overline{1,m}}\subset\mathbf{G}^{(+)}(t,\mathbf{X}(t),t+1),$$

определяем все его вершины $\mathbf{\Gamma}_n\left(\mathbf{G}^{(+)}(t+1)\right)=$ $=\{v^{(i)}(t+1)\}_{i\in\overline{1,k}}$, k,, $m, k\in\mathbb{N}$.

Поскольку, согласно работам [3, 4], справедливо соотношение:

$$\operatorname{conv}\left(\hat{\mathbf{G}}^{(+)}(t+1)\right)=\mathbf{G}^{(+)}(t,\mathbf{X}(t),t+1)=\mathbf{X}(t+1),$$

то вершины множества $\hat{\mathbf{G}}^{(+)}(t+1)$ будут описывать область достижимости линейной дискретной управляемой динамической системы (1) – (3) в момент времени $(t+1)$, являющейся выпуклым многогранником в $\mathbb{R}^n$. Задача поиска выпуклой оболочки множества $\hat{\mathbf{G}}^{(+)}(t+1)$ может быть сведена к решению ряда задач линейного математического программирования.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Зафиксируем промежуток времени $\overline{0,T}$ и для любого фиксированного набора $(T,\mathbf{X}(T))\in\{T\}\times\mathbf{2}^{\mathbb{R}^n}$ (здесь и далее для любого множества X символом $\mathbf{2}^X$ будем обозначать множество всех подмножеств множества X) определим в силу (1) – (3) следующие множества:

$$\mathbf{G}^{(-)}(T,\mathbf{X}(T),t)=\{x(t): x(t)\in\mathbb{R}^n, \forall t\in\{T,\ldots,1,0\}$$
$$x(t-1)=A^{-1}(t-1)[x(t)-B(t-1)u(t-1)],$$
$$x(T)\in\mathbf{X}(T),\ u(t-1)\in\mathbf{U}(t-1)\};$$
$$\mathbf{X}^{(e)}(0,\mathbf{X}(\tau),t)=\mathbf{G}^{(+)}(0,x(0),t)\bigcap\mathbf{G}^{(-)}(T,\mathbf{X}(T),t).$$

Здесь множество $\mathbf{G}^{(+)}(0,x(0),t)$ есть прямая область достижимости возможных состояний фазового вектора системы (1) – (3) на момент времени t, отвечающая набору $(0,x(0))=(0,x_0)$, а $\mathbf{G}^{(-)}(T,\mathbf{X}(T),t)$ есть обратная область достижимости возможных состояний фазового вектора рассматриваемой системы на момент времени t, отвечающая набору $(T,\mathbf{X}(T))$ [3, 4].

На основании сделанных построений и результатов работ [3, 4], можно показать, что решение сформулированной задачи оптимального программного терминального управления можно свести к решению следующей последовательности подзадач:

1) построения прямой области достижимости $\mathbf{G}^{(+)}(0,x(0),T)\in\mathbf{2}^{\mathbb{R}^n}$ (решается с помощью общего алгебраического рекуррентного метода [3] (прямая рекуррентная конструкция);

2) оптимизации выпуклого функционала $\mathbf{\Phi}=\mathbf{\Phi}(x(T))=\|x(T)-x_d\|_2$ на множестве $\mathbf{X}(T)$=$\mathbf{G}^{(+)}(0,x(0),T)\in 2^{\mathbb{R}^n}$, а именно, определения множества $\mathbf{X}^{(e)}_{\Phi}(T)\subset\mathbb{R}^n$ финальных фазовых состояний рассматриваемой системы из решения следующей задачи выпуклого математического программирования (ВМП):

$$\mathbf{X}^{(e)}_{\Phi}(T)=\mathbf{X}^{(e)}_{\Phi}(0,x(0),T)=\{x^{(e)}(T):$$
$$x^{(e)}(T)\in\mathbf{G}^{(+)}(\tau,x(0),T),$$
$$\mathbf{\Phi}^{(e)}=\mathbf{\Phi}(x^{(e)}(T))=\|x^{(e)}(T)-x_d\|_2=$$
$$=\min_{x(T)\in\mathbf{G}^{(+)}(0,x(0),T)}\|x(T)-x_d\|_2\}$$

(сводится к решению задачи ВМП, например, с помощью метода Зойтендейка (см. [1]));

построения последовательности обратных областей достижимости $\mathbf{G}^{(-)}(T,\mathbf{X}(T),t)\in 2^{\mathbb{R}^n}$, $t\in\{T-1,\ldots,0\}$, где $\mathbf{X}(T)$=$\mathbf{G}^{(+)}(0,x(0),T)\in 2^{\mathbb{R}^n}$ (решается с помощью общего алгебраического рекуррентного метода (обратная рекуррентная конструкция) [3];

3) построения следующей последовательности множеств:

$$\widehat{\mathbf{X}}^{(e)}(0,\mathbf{X}^{(e)}_{\Phi}(T),t)=\mathbf{G}^{(+)}(0,x(0),t)\bigcap\mathbf{G}^{(-)}(T,\mathbf{X}^{(e)}_{\Phi}(T),t);$$
$$\widehat{\mathbf{X}}^{(e)}(0,\mathbf{X}^{(e)}_{\Phi}(T),0)=\{x(0)\};\widehat{\mathbf{X}}^{(e)}(0,\mathbf{X}^{(e)}_{\Phi}(T),T)=\mathbf{X}^{(e)}_{\Phi}(T)$$

(решается с помощью модификации общего алгебраического рекуррентного метода, т.е. сведения к реализации решения конечной последовательности задач ЛМП [3]);

5) решения на промежутке $\overline{0,T}$ двухточечных краевых задач для динамической рекуррентной системы (1) – (3) при краевых условиях $x(0)=x_0$ и $x(T)=x^{(e)}(T)\in\mathbf{X}^{(e)}_{\Phi}(T)$, т.е. нахождения следующего множества оптимальных программных управлений:

$$\mathbf{U}^{(e)}\left(\overline{0,T},x_0,\mathbf{X}^{(e)}_{\Phi}(T)\right)=\{u^{(e)}(\cdot):\forall t\in\overline{0,T-1},u^{(e)}(t)\in\mathbf{U}(t),$$
$$x^{(e)}(t+1)=A(t)x^{(e)}(t)+B(t)u^{(e)}(t)\in\mathbf{X}^{(e)}(0,\mathbf{X}^{(e)}_{\Phi}(T),t+1),$$
$$x^{(e)}(0)=x_0\in\mathbf{X}(0)\}$$

(решается с помощью сочетания обратной и прямой рекуррентных конструкций) [3].

Из результатов работ [3, 4] следует, что сформированное множество допустимых программных управлений $\mathbf{U}^{(e)}\left(\overline{0,T}, x_0, \mathbf{X}_{\Phi}^{(e)}(T)\right)$ есть множество всех допустимых программных управлений, являющихся решением рассматриваемой задачи оптимального программного терминального управления.

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Математическая модель для решения задачи терминального управления расходом топлива ракеты-носителя приводится в работе [2] и относится к классу линейных дискретных динамических систем (1) с ограничениями (3).

При моделировании приняты следующие значения основных величин:

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}; \; A(\overline{2,16}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5.625 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5.625 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 618 \\ 0 \\ -300.1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1155 \\ 117400 \\ 432 \\ 44100 \end{pmatrix}; \; |u(t)| \leq 0{,}07; \; t \in \overline{0,16}.$$

Минимизируется значение квадратичного функционала:

$$\Phi = \left(1152.5 - x_1(17)\right)^2 + \left(432.5 - x_3(17)\right)^2 + \\ + \left(x_2(17)\right)^2 + \left(x_4(17)\right)^2 + \left(x_2(17) - x_4(17)\right)^2 .$$

Моделирование предложенного метода оптимизации программного терминального управления проводилось в программной среде MATLAB R2014a. На рисунке 1 изображены графики изменения основных координат состояния во времени для одной из оптимальных траекторий а также график оптимального программного управления $u^{(e)}(t)$. Значение показателя качества составило $\Phi = 37{,}1382$ в точке $x(17) = \left(1152{,}5 \quad 3{,}7377 \quad 432{,}4482 \quad 4{,}7131\right)^T$.

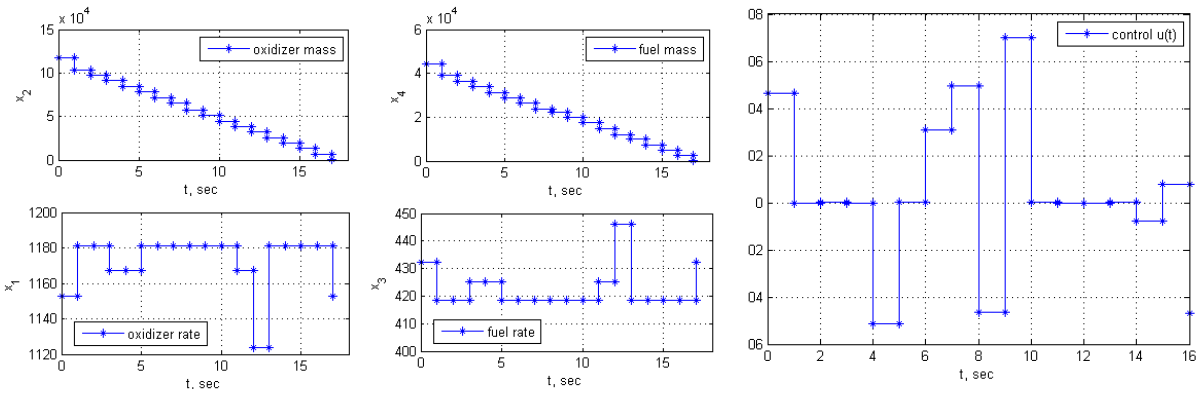

Рисунок 1 – Графики изменения фазовых координат $x(t)$ и оптимального управления $u^{(e)}(t)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в данной работе метод оптимизации программного терминального управления, основанный на работах [3, 4], был реализован в программной среде MATLAB R2014a и показал достаточно хорошие результаты при моделировании для линейной дискретной динамической системы четвертого порядка.

Поскольку метод использует аппарат построения точных областей достижимости линейных дискретных динамических систем, то его применимость ограничена системами малого порядка (до 10) и небольшим количеством шагов.

Для увеличения производительности предложенного в данной работе метода можно прибегнуть либо к аппроксимации множеств достижимости, либо к модификации алгоритма поиска выпуклой оболочки множества, то есть к использованию некоторого быстрого метода решения задач ЛМП.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. Москва: Изд-во ин. лит., 1963. 176 с.
2. Калёв В.И, Шориков А.Ф. Моделирование задачи терминального управления расходом топлива жидкостных ракет // Известия высших учебных заведений. Физика. 2016. Т. 59, № 8-2. С. 45–48.
3. Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф. Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы // Автоматика и телемеханика. 1993. № 4. С. 115–127.
4. Шориков А.Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997. 242 с.